

台灣政府公債市場遠期利率期限結構之估計—GCV 與 VRP 模型之比較

ESTIMATING THE TERM STRUCTURE OF FORWARD INTEREST RATE IN TAIWAN GOVERNMENT BONDS MARKET : A COMPARISON BETWEEN THE GCV AND THE VRP MODEL

周建新

國立高雄第一科技大學財管系

于鴻福

國立虎尾科技大學工管系

陳振宇

國立高雄第一科技大學管研所博士班

Jian-Hsin Chou

Department of Finance

National Kaohsiung First University of Science and Technology

Hong-Fwu Yu

Department of Industrial Management

National Formosa University

Zhen-Yu Chen

Institute of Management

National Kaohsiung First University of Science and Technology

摘 要

本研究主要針對改善利率期限結構平滑度之兩種 roughness penalty 方法，比較其配適能力優劣。本文在 Fisher, Nychka, and Zervos (1995) 所提出之 smoothed

splines 加上 roughness penalty 模型的基礎上，首先採用 generalized cross-validation (GCV) 模型，來估計台灣政府公債市場的遠期利率期限結構，實證結果發現 GCV 模型對於台灣政府公債市場利率期限結構的估計，在平滑度上具有較佳之配適結果表現。本文另外採用 Waggoner (1997) 所提出之 Variable roughness penalty (VRP) 模型進行比較，結果發現 VRP 模型在精確度配適能力較 GCV 模型為佳，但在平滑度方面之配適能力則略遜一籌。

關鍵字：遠期利率期限結構、GCV 模型、VRP 模型

ABSTRACT

This paper investigates the fitting performance of term structure of forward rates based on the roughness penalty correction model. At first, the generalized cross-validation (GCV) model proposed by Fisher, Nychka, and Zervos (1995) is used to estimate the term structure of forward rate in Taiwan Government bonds market. The empirical results reveal that the GCV model can produce a better performance in fitting smoothness. In addition, comparing the results with Variable roughness penalty (VRP) derived by Waggoner (1997), the VRP model outperformed the GCV model in fitting accuracy but an inferior results in smoothness.

Key words : term structure of forward rates, GCV model, VRP model

壹、導論

債券市場與股票市場為資本市場兩大支柱，兩者具有互補之功能，缺一不可。債券市場的主要功能在於提供資金需求者長期且穩定的資金，不但可以加深資本市場的深度，幫助政府或企業取得足夠之長期資金以發展經濟，並有利於金融市場的穩定。近年來，在主管機關的努力與支持下，加上櫃檯買賣中心陸續推出各項健全債券市場制度，對於提升國內債券市場的透明度、流動性、交易效率及交割效率，皆有明顯之助益，另外台灣期交所亦配合推出長短期利率期貨契約，均使得債券市場益加受到國內外投資者之重視。

利率期限結構是指在相同違約風險水準下，各期零息債券（zero-coupon bond）之殖利率曲線（yield curve）。近年來，隨著國際金融市場的多元化、自由化，金融創新與金融商品的大量問世，分析利率期限結構的變化，是所有固定收益證券模型評價中最重要之概念，利用合理估計之利率期限結構，可以運用於投資決策、預測未來利率走勢，及管理利率風險；此外，利率期限結構可視為無風險基準點，因此投資人和交易商可以藉助推估而得之利率期限結構，對於風險性金融資產及其它利率衍生性金融商品（例如：交換、利率上下限等），作一評價。利率期限結構反應的是市場上所有參與者，對未來利率和通貨膨脹的預期，對政策制定者而言，其可作為貨幣政策的分析工具，因此，如何正確的建構一合適之利率期限結構，就成為學術及實務界所共同關心的課題。

估計利率期限結構的研究可分為一般均衡模型（general equilibrium model）、無套利模型（no-arbitrage model）和統計配適方法（curve fitting）等三種領域。均衡理論模型始於 1970 年代，Dothan（1978）、Brennan and Schwartz（1979）、Cox, Ingersoll, and Ross（1985）等學者以均衡理論模型來推導利率期限結構，其係假定經濟變數（如：短期無風險利率、通貨膨脹率）服從某一隨機過程（stochastic process）下，利用隨機過程描述利率，進而推導出在這些假設下的利率期限結構；此外，均衡理論模型對於風險中立之假設，可能並不符合真實金融市場，故所推估之債券理論價格與市場價格，將產生顯著之誤差，無法與真實市場上之利率期限結構一致。無套利模型如 Ho and Lee（1986）、Heath, Jarrow, and Merton（1992）等，根據已知的利率期間結構，代入無套利模型中，以便探索未來利率期限結構之變化，並正確地評價利率衍生性商品，至於如何得到已知的利率期限結構，則必須以統計配適方法來估計。以統計配適方法來建構利率期限結構，主要係提供一有效之估計模式，求得接近實際市場之零息殖利率曲線，然而其必須在曲線之精確性與平滑性（accuracy and smoothness）上，取得平衡。

目前統計配適方法在配適函數之型態，大致可以分成樣條函數（Spline）家族及指數型多項式函數家族兩種類型；其中樣條函數法是將整段資料分佈範圍切割成許多小區段，再分別以最小平方誤差等計量方法，估計各區段之參數值，由於估計結果能逼近觀察值之曲線，因此包括 Lin（1999）等學者，均認為樣條函數為基礎之統計配適方法，可得較佳之配適結果，且已經被實務界廣泛地應用在估計債券的殖利率曲線上，例如美國聯邦準備理事會（Fed）就是使用 Cubic Spline method，來計算固定期限之公債殖利率¹。

McCulloch (1975) 是以 spline 配適殖利率曲線的先驅，其做法是先假設折現因子曲線 (discount factor curve) 之函數型態為三次多項式，估計出折現因子後，再轉換為所欲求之殖利率曲線，稱為 polynomial spline。Shea (1985) 指出三次多項式其震盪過大與不穩定，使曲線之平滑度僵化，容易產生誤差過大的情形。有鑒於此，Fisher, et al. (1995) 提出 smoothed splines，並加上不平滑懲罰 (roughness penalty) 修正項，依此來估計遠期利率曲線。此一 roughness penalty 可以控制殖利率曲線震盪過大之缺失，但卻可能降低模型的配適精確程度。Fisher, et al. (1995) 在 roughness penalty 之估計上，是採用 generalized cross-validation (GCV) 模型，藉以在配適之精確度與平滑度上取得一平衡點。然而 Bliss (1997) 指出 Fisher, et al. (1995) 模型，對於較短到期日之證券，可能會產生錯誤訂價之現象。Waggoner (1997) 在前述 roughness penalty 函數之選擇上，提出 Variable Roughness Penalty (VRP) 模型，將債券到期日之長短分成三個階段，並給予不同之 roughness penalty，期望能有效地減少長期震盪，並保有短期的擬合度，藉由此一修正，將可能使有價證券在短期之訂價上較具彈性。

近年來，國內亦有不少學者以統計方法來配適台灣政府公債市場之利率期限結構²，例如 Lin (2002)、蔣松原 (2000) 以 spline 函數來建構台灣公債市場之殖利率曲線；吳秉儒 (1995) 以日本公債為樣本，比較 B-Spline 模型與 Exponential B-Spline 模型的配適能力。另外謝承熹 (2000) 則以分段三次方指數函數來配適台灣公債市場之利率期限結構；李桐豪 (2001) 以立方樣條函數與 Nelson and Siegel 等方法，估計我國公債市場利率期限結構，探討兩類估計結果的差異。陳美娥 (2001) 以 Pham (1998) 提出的契比雪夫多項式模型 (Chebyshev polynomials model)，配適台灣公債市場的利率期限結構。周建新、于鴻福與張千雲 (2003) 分別以 B-Spline 模型及 Nelson and Siegel (1987) 的 Parsimonious 模型，比較兩者在估計台灣政府公債市場的利率期限結構之配適能力。不過遺憾的是上述論文均以模型精確度配適能力為討論重點，對於模型平滑度配適能力則並未加以討論。然而平滑度之配適能力考量在模型之建構上亦非常重要，因為當殖利率曲線震盪過大與不穩定時，可能將使曲線平滑度僵化，容易產生誤差過大的情形，並導致遠期利率之估算上產生負值之現象。因此將平滑度之配適能力納入於模型中考量，將能有效控制曲線震盪過大與不穩定之缺失。

由前述可知，Fisher, et al. (1995) 所提出之 GCV 模型，與 Waggoner (1997) 所提出之 VRP 模型，主要特色在目標函數上加一不平滑懲罰項，藉以降低估計殖利率曲線所可能產生震盪過大與不穩定之缺失。VRP 模型在 roughness penalty 設定

上為事後觀點 (ad hoc)，必須依實際債券資料不斷試誤。由於國內並無學者提出修正平滑度之 GCV 模型與 VRP 模型，以此兩種模型在改良平滑度之優、劣進行比較。因此本文以 Fisher, et al. (1995) 所提出之 smoothed splines 為基礎，針對改善利率期限結構平滑度之兩種 roughness penalty 模型，亦即 GCV 模型與 VRP 模型，分別估算出適用於台灣政府公債之 roughness penalty，並比較此兩種模型之配適能力優劣，期望找出較適用於台灣公債市場之遠期利率期間結構模型。除此之外，本文將一併比較未以 GCV 與 VRP 模型調整平滑度 smoothed splines 之配適結果，再作三者之配適能力比較。

本文的後續內容為：第二節為實證模型介紹；第三節為實證分析結果；第四節為結論。

貳、實證模型

首先我們先針對折現因子，殖利率曲線，與遠期利率曲線在對附息債券進行訂價方面之關係，做簡單之說明。

折現因子 ($D(t)$) 代表零息債券在到期日(t)支付一元，所換算出之目前無風險價格， $y(t)$ 代表零息債券之殖利率曲線， $f(t)$ 代表遠期利率曲線，其相互關係如式(1)：

$$D(t) = \exp(-ty(t)) = \exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right) \quad (1)$$

藉由其中一條利率曲線，可推估出另外兩條利率曲線。然而 Fisher, et al. (1995) 比較得出 $f(t)$ 所估出之結果較為精確，因此本研究針對遠期利率曲線進行估算。由於政府公債之遠期利率曲線，可以轉換成近似的 spline 函數，因此得出 ($f(t) = \delta^T B(t)$)，而此 p 次方之基底函數為 (本研究採 $p=2$)³⁾：

$$B(t) = \left(1, t, \dots, t^p, (t - k_1)_+^p, \dots, (t - k_k)_+^p\right)^T$$

$$\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p+k})^T$$

其中 $B(t)$ 代表為 spline 之向量基底函數， δ 為係數之向量， $\{k_k\}_{k=1}^K$ 為 splines 節點，當 $t \geq k$ 時 $(t - k_k)_+^p = (t - k_k)$ ，否則為 0。

不考慮稅率與交易成本之情況下，附息債券之價格可以表示如式(2)：

$$\begin{aligned}\hat{p}_i &= \sum_{j=1}^{Z_i} C_i(t_{i,j}) D(t_{i,j}) = \sum_{j=1}^{Z_i} C_i(t_{i,j}) \exp \left\{ -t_{i,j} y(t_{i,j}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{Z_i} C_i(t_{i,j}) \exp \left\{ -\int_0^{t_{i,j}} f(s, \delta) ds \right\}\end{aligned}\quad (2)$$

其中： $\hat{p}_i$ 代表第 i 個附息債券之價格。 z_i 代表第 i 個債券之距到期日。 $C_i(t_{i,j})$ 為本金與利息之支付，當 $j \neq Z_i$ 時支付利息； $\hat{p}_i$ 代表債券估計之價格。因此，遠期利率曲線 $f(t)$ 可以藉由極小化方程式(3)而得之。

$$Q_{n,\lambda}(\delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[P_i - \hat{P}_i(\delta) \right]^2 + \text{roughness penalty} \quad (3)$$

其中 Q 代表結合精確度與平滑度之測量值。極小化方程式(3)之目的，乃是希望在第一項測量配適精確程度，與第二項測量平滑度之中找到一平衡點。然而在參數 δ 估算方面，本研究採用採用非線性最小平方法，並根據牛頓法解根之迭代過程，而得出最適解。而牛頓法 (Newton-Raphson method) 之迭代過程如下：

$$\delta_{i+1} = \delta_i - G_i^{-1} g_i$$

其中 δ_{i+1} 為所估算之最適化參數， δ_i 為估算之起始值， g_i 為梯度向量 (gradient vector)， G_i 為 Hessian matrix，其代表形式分別如下：

$$g(\delta) = \left[\frac{\partial Q(\delta)}{\partial \delta_1}, \frac{\partial Q(\delta)}{\partial \delta_2}, \dots, \frac{\partial Q(\delta)}{\partial \delta_{p+k}} \right]^T$$

$$G(\delta) = (r_{ij})$$

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 Q(\delta)}{\partial \delta_i \partial \delta_j}$$

在 roughness penalty 方面，本研究分別以 GCV 模型與 VRP 模型進行探討，期望估出較精確之遠期利率曲線。

一、GCV 模型估算 λ ：

藉由極小化下列方程式(4)而求得遠期利率函數之參數：

$$\min \left[\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i(\delta))^2 + \lambda \int_0^T [\delta''(k_t)]^2 dk_t \right] \quad (4)$$

其中節點 $k_o < k_1 < \dots < k_k$ 。

本研究針對 λ 估計藉由極小化 (GCV) 模型，方程式表示如下：

$$GCV(\lambda) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (P_i - \hat{P}(\delta))^2}{(1 - n^{-1} \theta \text{tr} A(\lambda))^2} \quad (5)$$

其中： $A(\lambda) = m^{(1)}(\hat{\delta}) \left\{ n \left(\sum_n + \lambda G \right) \right\}^{-1} \left\{ m^{(1)}(\hat{\delta}) \right\}^T$

$$m_i(\delta) = \hat{p}_i(\delta) = \sum_{j=1}^{Z_i} C_i(t_{i,j}) \exp \left\{ -\delta^T B^I(t_{i,j}) \right\}$$

$$m^{(1)}(\hat{\delta}) = \left(m_1^{(1)}(\hat{\delta}(\lambda)), m_2^{(1)}(\hat{\delta}(\lambda)), \dots, m_n^{(1)}(\hat{\delta}(\lambda)) \right)^T$$

$$m_i^{(1)}(\hat{\delta}(\lambda)) = \partial m_i(\delta) / \partial \delta^T \Big|_{\hat{\delta}(\lambda)}$$

$$= - \sum_{j=1}^{Z_i} C_i(t_{i,j}) \exp \left\{ -\delta^T B^I(t_{i,j}) \right\} B^I(t_{i,j})$$

$$\sum_n = n^{-1} \left[\left\{ m^{(1)}(\hat{\delta}) \right\}^T m^{(1)}(\hat{\delta}) \right]$$

一般而言，當 θ 越大，將會導致 splines 會越平滑，因此本文依 Fisher, et al.(1995) 模型之作法，將 θ 設定為 2。

二、VRP 模型估算 λ ：

本研究採用 Waggoner (1997) 在 roughness penalty 函數之選擇上，所提出之 Variable Roughness Penalty (VRP) 模型，藉由將債券到期日之長短分成三個階段，並給予不同之 roughness penalty，企圖使較短到期日比較長到期日更有彈性，因此修正(4)式而得(6)式。

$$\min \left[\sum_{i=1}^N (P_i - \hat{P}_i(\delta))^2 + \int_0^T \lambda(t) [\delta''(k)]^2 dk \right] \quad (6)$$

而在 roughness penalty 方面，將 λ 區分為短期、中期、長期三部分分別估出如下⁴，藉由可變化之 penalty 能有效地減少長期震盪，並保有短期的擬合度。

$$\lambda(t) = \begin{cases} 100 & 0 \leq t < 5 \\ 1000 & 5 \leq t < 10 \\ 100000 & 10 \leq t \end{cases}$$

三、配適能力判斷準則：

利率期限結構估計模型之配適能力優劣，可以分成精確度與平滑度兩種衡量指標，說明如下：

(一) 精確度之衡量指標

此一衡量指標係以相對訂價誤差角度，先由不同利率期間結構估計模型所估算出之價格，與實際市場價格作一比較。本研究採用三種判斷準則，比較不同模型的配適能力優劣。

1. 判定係數 (R-Squares)：

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{P}_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n \left(\hat{P}_i - \bar{P} \right)^2}, \text{ 其中 } \bar{P} \text{ 為市場價格之平均數, 此一指標可提供一明確的參}$$

照數值做為模型優劣之判斷準則，此一數字越大，代表模型之配適能力越佳。

2. 平均方根誤差百分比 (root mean squared percentage error, RMSPE)：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{P}_i - P_i}{P_i} \right)^2} \times 100 \%, \text{ 為一相對量的錯誤評估準則, 數值越小, 模型越能}$$

捕捉到市場之價格。

3. 平均方根誤差 (root mean squared error, RMSE)：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{P}_i - P_i)^2}, \text{ 為一絕對量的錯誤評估標準。}$$

(二) 平滑度之衡量指標

利率期限結構估計模型，除了以配適能力來比較不同模型的優劣之外，模型的平滑度亦為考量的因素之一，在相關文獻中，Shea (1985) 認為模型配適的成功關鍵決定於曲線的平滑程度；Adams and Deventer (1994) 則以最大平滑法 (maximum smoothness) 直接配適遠期利率曲線，以避免產生負值之遠期利率。由於其定義為連續型之定積分形式，計算過程繁複，因此本研究依照陳美娥 (2001) 的簡化方法，採用間斷的方式計算平滑度，其方法為每隔 0.05 年取一點，計算遠期利率 (f)，

並求算各點之間二次差分後的平方和，數值愈小，表示平滑度（ S ）愈大，其式如下：

$$S = \sum_{t=0.1}^{20} \{ [f(t) - f(t-0.05)] - [f(t-0.05) - f(t-0.1)] \}^2 \times 0.05$$

參、實證結果

一、資料來源

本研究的樣本期間為 2002 年 5 月 31 日至 2004 年 5 月 28 日，以到期日在 30 年以內的台灣政府公債為樣本，總計政府公債樣本數為 103 筆，資料來源為櫃檯買賣中心之交易資料。其中政府公債付息頻率為一年，樣本為每週星期五之最高和最低殖利率報價之平均值；若無交易資料時，亦即市場仍未有新的資訊來反應價格，則以最接近交易日的資料替代之。觀察樣本以週為單位，每一週之政府公債樣本數均在 35 種以上。

二、研究限制

- (一) 由於本研究取樣期間，國內政府公債交易以附條件交易為主⁵，買賣斷交易中主要集中在熱門券上，因此在流動性限制下，可能影響實證的精確度。
- (二) 由於早期國內發行之債券大多為中長期之債券（7~10年為主），因此就到期日而言，自然無法含蓋整個樣本期間。而國內目前公債發行種類雖然有超過70種以上之債券，但由於有部分之公債幾乎已無交易，若將這類債券納入樣本資料中進行估計，可能會導致模型產生誤差過大之情況。因此本研究將交易量較微小之債券予以剔除。而在刪除後每週至少會保留35種以上之債券，雖然尚能有效估計，但可能會產生些許之誤差。

三、Generalized Cross Validation 模型實證結果分析

本研究採用 Fisher, et al. (1995) 所提出之 smoothed splines 加上 roughness penalty 修正項模型，針對遠期利率曲線進行估計。由於 roughness penalty 可以控制殖利率曲線震盪過大之缺失，但卻可能降低模型在精確度上之配適能力，在此本文

表 1 GCV 模型樣本觀察期間在精確度與平滑度之配適結果

判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差 百分比	平均方根誤差	平滑度 ($\times 10^{-6}$)
平均值	0.978	0.015	1.688	1.549
標準差	0.016	0.007	0.805	1.287
最大值	0.998	0.032	3.862	8.115
最小值	0.933	0.005	0.598	0.038

首先採用 GCV 模型，來衡量台灣政府公債市場之遠期利率期間結構，藉以在配適程度與平滑度上取得一平衡點。根據全部之觀察樣本，計算出上述四種指標，依據 GCV 模型結合 smoothed splines 的配適結果，如表 1 所示。就判定係數而言平均值高達 97.8%，最高可達 99.8%，最低為 93.3%，其中有 92.38% 的觀察時點，模型的判定係數在 95% 以上；而亦有 32.38% 的觀察時點其平均方根誤差百分比是小於 1%。至於在平方根誤差百分比指標上，在樣本期間內，平均每一張債券的理論價格和實際價格會相差 1.5%⁶，差異最大為 3.2%，最小僅為 0.5%。另外平均方根誤差之平均值為 1.688，亦即每百元報價的實際價格和理論價格相差不到 2 元，最小可到 0.6 元最大為 3.862 元。顯示此一模型在此二種精確度配適能力上確實表現不佳，這也說明了平滑度與精確度有互斥的關係存在，GCV 模型雖增加了平滑度，但需以降低模型之精確度為代價。

為了檢視樣本期間中各判定準則的變化情形，本研究將判定係數、平均方根誤差百分比及平均方根誤差，如圖 1 圖 3 所示。

從判定係數分佈可以發現，該模型在觀察期間 表現相當穩定，判定係數幾乎都高達 93%，而在樣本期間中段部分，判定係數的變化較大且不穩定，可能的原因為該段觀察期間，債券交易集中在少數熱門券上，造成樣本資料不足所導致。整體而言，從圖 1 至圖 3 中，亦可發現 GCV 模型在三個精確度配適能力指標上，均得到一致之結果，尤其在觀察期間後段，在樣本資料數較為齊全，及考慮樣本實際情形來設定 roughness penalty 參數值下，會使得估計結果之精確度配適能力進一步提高。

GCV 模型所配適的遠期利率期間結構，觀察日由 2002 年 5 月 31 日至 2004 年

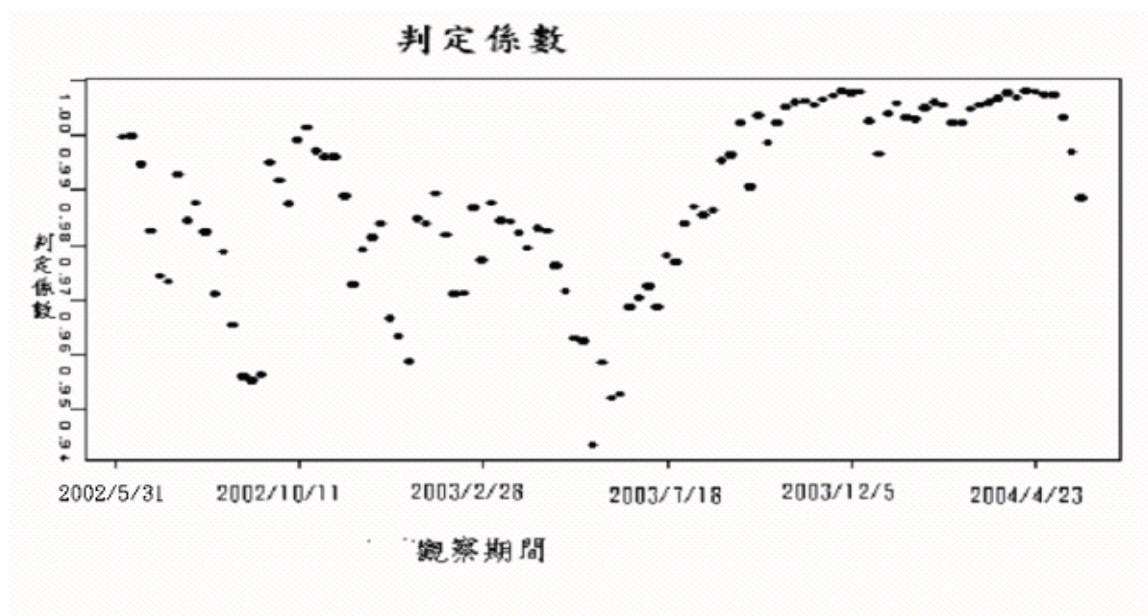


圖 1 GCV 模型樣本期間判定係數分佈圖

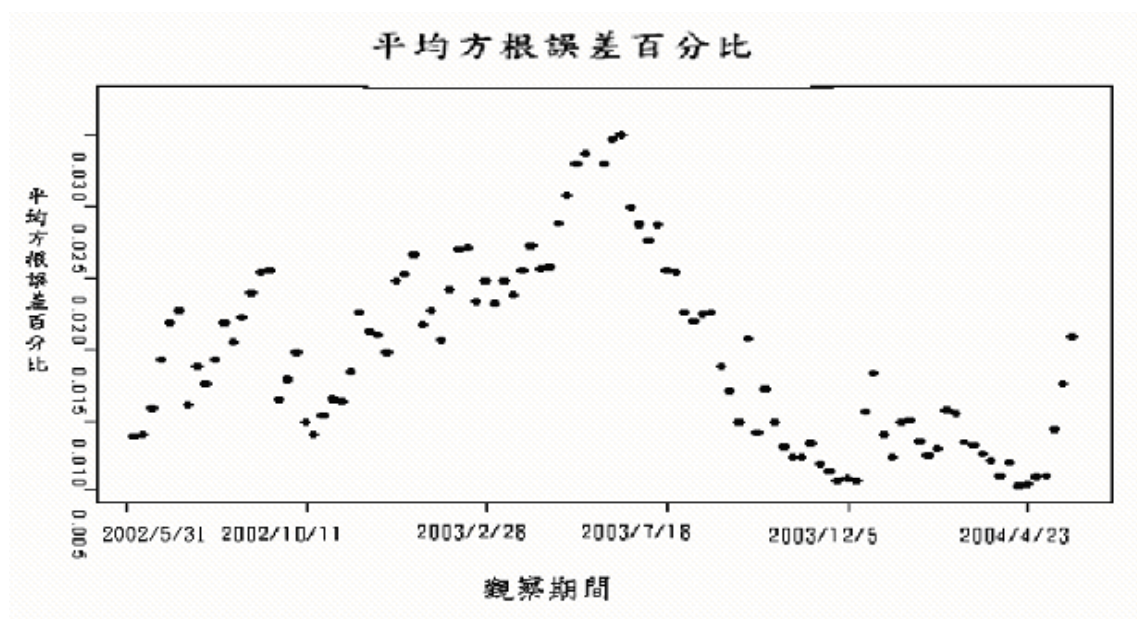


圖 2 GCV 模型樣本期間平均方根誤差百分比分佈圖

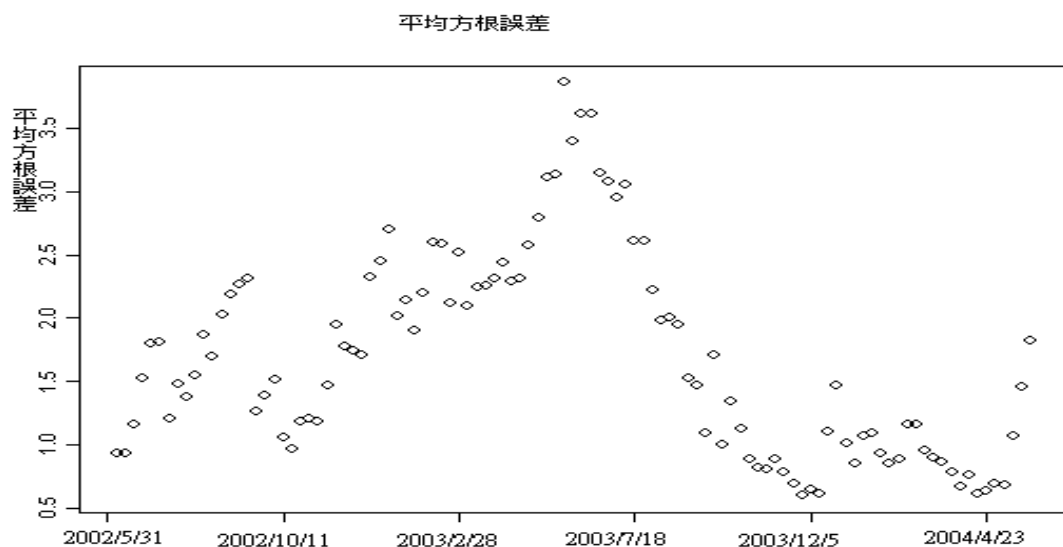


圖 3 GCV 模型樣本期間平均方根誤差分佈圖

5 月 28 日，根據圖形大致可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀，如圖 4 所示，顯示 GCV 模型所建構之遠期利率曲線，為一相當平滑之曲線。

四、Variable Roughness Penalty 模型實證結果分析

本研究另外採用 Waggoner (1997) 所提出之 Variable Roughness Penalty (VRP) 模型，來設定 roughness penalty 函數，將距到期日之長短分成三階段，並給予不同之 roughness penalty，期望能有效地減少長期震盪，並保有短期的擬合度。根據全部之觀察樣本，計算出上述四種指標，依據 VRP 模型結合 smoothed splines 的配適結果，如表 2 所示。就判定係數而言，平均值高達 98.07%，最高可達 99.86%，最低為 93.89%；而平方根誤差百分比在樣本期間內，平均每一張債券的理論價格和實際價格會相差 1.35%，差異最大僅為 3.02%，最小僅為 0.41%；另外平均方根誤差之平均值為 0.452，亦即每百元報價的實際價格和理論價格相差不到 0.5 元，最小可到 0.012 元，最大為 1.12 元。

為了檢視樣本期間中各判定準則的變化情形，本研究將判定係數、平均方根誤差百分比及平均方根誤差，如圖 5~7 所示。

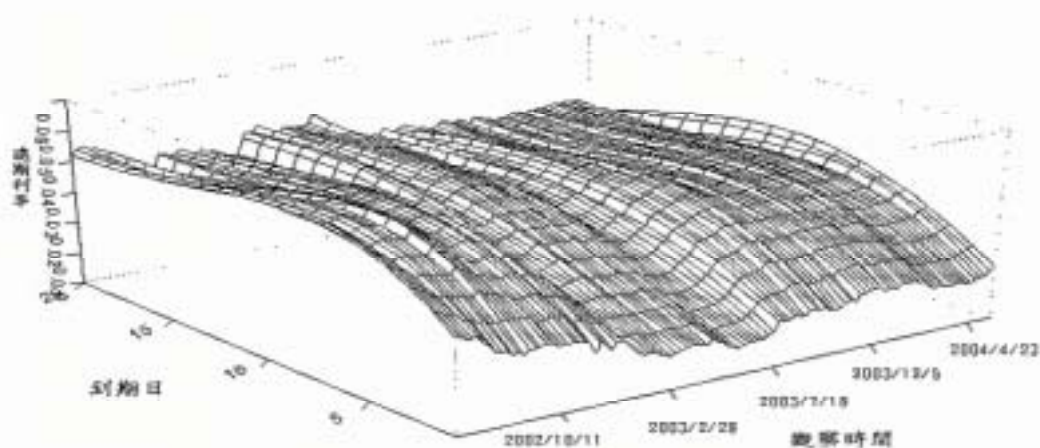


圖 4 GCV 模型所建構之遠期利率曲線

表 2 VRP 模型樣本觀察期間精確度與平滑度之配適結果

判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差 百分比	平均方根誤差	平滑度 ($\times 10^{-6}$)
平均值	0.981	0.013	0.452	5.0326
標準差	0.015	0.006	0.258	4.7309
最大值	0.999	0.030	1.119	31.9270
最小值	0.939	0.004	0.012	0.2863

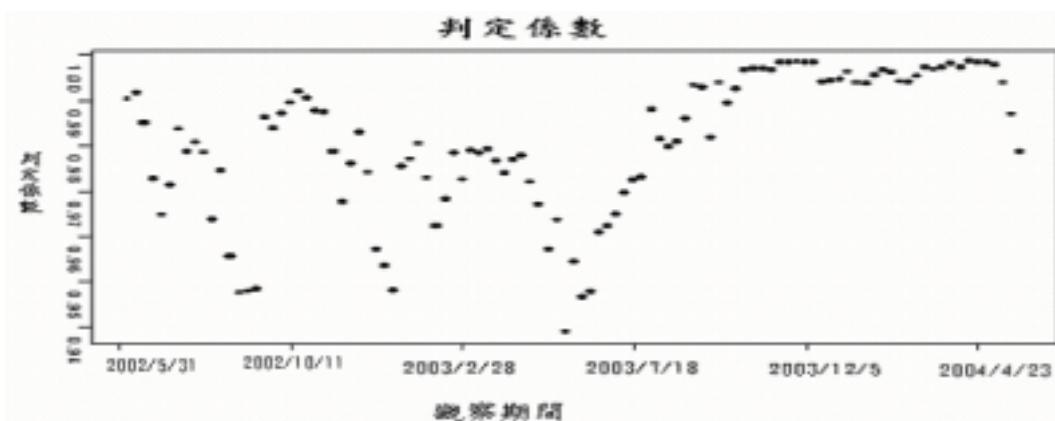


圖 5 VRP 模型樣本期間判定係數分佈圖

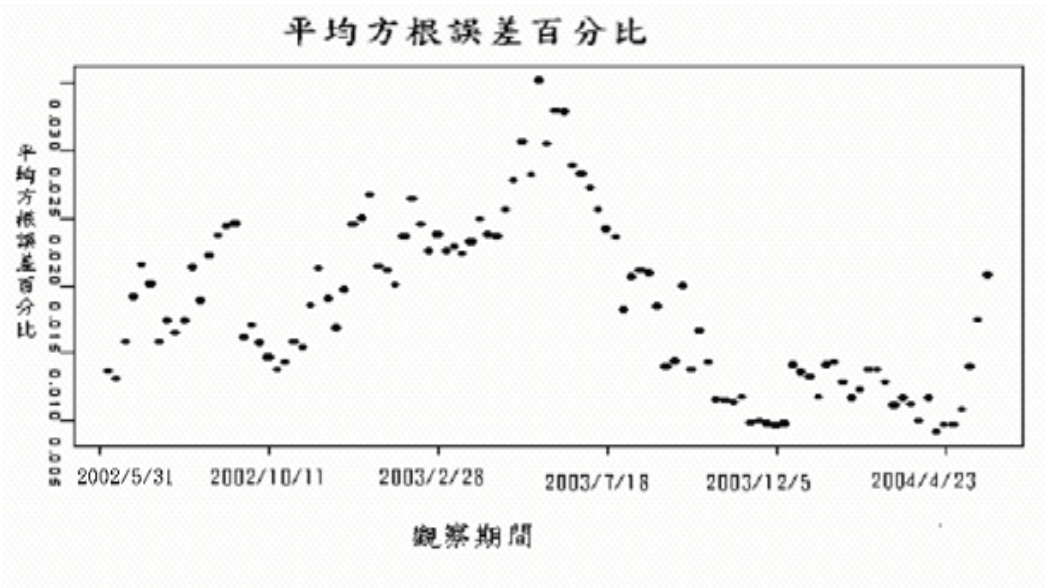


圖 6 VRP 模型樣本期間平均方根誤差百分比分佈圖

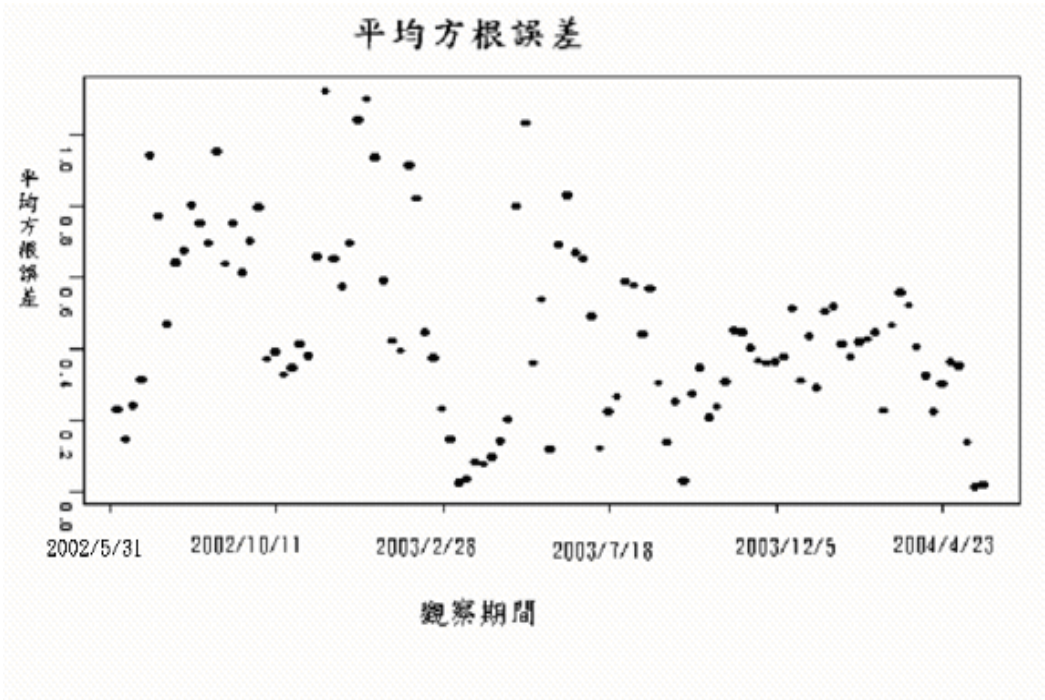


圖 7 VRP 模型樣本期間平均方根誤差分佈圖

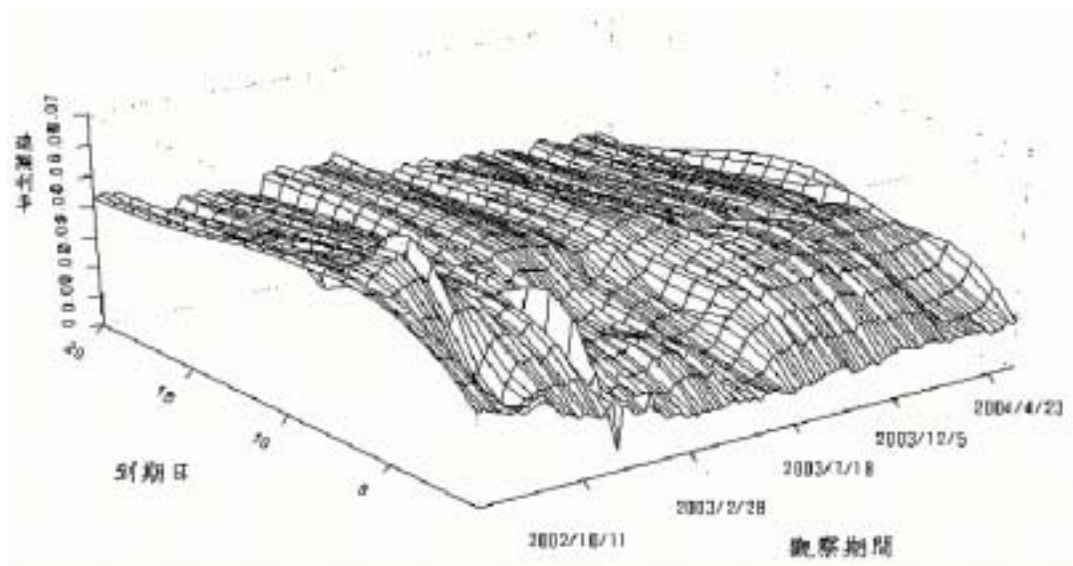


圖 8 VRP 模型建構之遠期利率曲線

VRP 模型所配適的遠期利率期間結構，觀察日由 2002 年 5 月 31 日至 2004 年 5 月 28 日，根據圖形大致可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀，如圖 8 所示。與圖 4 相比較，顯示 VRP 模型所建構之遠期利率曲線，在平滑度上是不如 GCV 模型。

比較 GCV 與 VRP 兩種模型在估計遠期利率期限結構之配適能力後，可以發現 VRP 模型在精確度衡量指標上，有較佳之表現。但由於模型精確度與平滑度有互抵之關係，因此在平滑度衡量指標上，反而表現不如 GCV 模型。

五、不同模型之配適能力與平滑度比較

本研究以 GCV 模型與 VRP 模型作為配適能力之比較基準。並將此兩種模型之精確度與平滑度結果列於表 3，由表 3 可以發現 Smooth Spline 模型在所有精確度配適能力上，均表現最優，VRP 模型次之，而 GCV 模型之配適結果，則表現相對較為遜色。然而在平滑度方面，GCV 模型與 VRP 模型均提高了平滑度配適能力，其中又以 GCV 模型最為平滑。

表 3 兩種模型在精確度與平滑度配適能力比較

判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差 百分比	平均方根誤差	平滑度 (10^{-6})
Smooth Spline 模型	0.983 (0.011)	0.011 (0.003)	0.242 (0.133)	20.529 (32.938)
GCV 模型	0.978 (0.016)	0.015 (0.007)	1.688 (0.805)	1.5491 (1.2871)
VRP 模型	0.981 (0.015)	0.013 (0.006)	0.452 (0.258)	5.0326 (4.7309)

註：數字為平均值，括號內數字為標準差。

由於文獻中，一般學者主要以 RMSPE 及以 Root mean squared error，來衡量精確度配適能力（例如：Mansi & Phillips, 2001、Jordan & Mansi, 2003 等），因此從表 3 中可知，Smooth Spline 模型若要考慮平滑度修正項後，則以 VRP 模型表現較佳。

為了更進一步分析比較兩種模型之精確度衡量指標與平滑度指標間，是否具有統計上顯著差異性，本文依不同利率期限結構模型計算之理論價格，與實際市場價格誤差平方為計算基礎，根據判定係數、平均方根誤差百分比、平均方根誤差、與平滑度作模型間之差異性比較檢定，其檢定結果如表 4 所示。在表 4 中可知，VRP 模型在精確度配適能力方面是優於 GCV 模型，但兩者在統計上，除平均方根誤差外，並無顯著差異。然而在平滑度檢定方面，GCV 模型在 0.01 顯著水準下，是優於 VRP 模型。

肆、結論

利率期限結構描述零息債券（pure discount bond）的殖利率與其到期日之間的關係，其不僅可作為公債、公司債等債券的定價依據，亦是評價各種利率衍生性商品的輸入資料，其重要性不言而喻。由於各國政府甚少發行到期日超過一年以上之

表 4 兩種模型在精確度與平滑度配適能力檢定

判斷準則 統計值	判定係數	平均方根誤差 百分比	平均方根誤差	平滑度 (10^{-6})
GCV 模型	0.978 (0.016)	0.015 (0.007)	1.688 (0.805)	1.5491 (1.2871)
VRP 模型	0.981 (0.015)	0.013 (0.006)	0.452 (0.258)	5.0326 (4.7309)
Z 值檢定	-1.2697	1.4074	14.992***	-7.2804***

註：表內數字為平均值，括號內數字為標準差。顯著水準為 0.01 時，拒絕域： $Z > 2.33, Z < -2.33$ ；顯著水準為 0.05 時，拒絕域： $Z > 1.645, Z < -1.645$ ；顯著水準為 0.1 時，拒絕域： $Z > 1.28, Z < -1.28$ 。***代表在顯著水準 0.01 下，平均數有顯著差異。**代表在顯著水準 0.05 下，平均數有顯著差異。*代表在顯著水準 0.1 下，平均數有顯著差異。

零息債券（所發行者皆為附息債券），因此本文以 Smooth Spline 模型為基礎，以 GCV 模型與 VRP 模型修正平滑度，利用 Newton-Raphson 數值方法，求得台灣政府公債市場之遠期利率期限結構。

本研究以 Smooth Spline 模型為基礎，結合 GCV 模型與 VRP 模型來進行利率期限結構的配適。就其形狀而言，大致可分為上升型、下降型及駝峰型。研究結果顯示，以原始 Smooth Spline 模型來估計台灣政府公債市場，可以獲得最佳之精確度配適結果。然而為進一步增加曲線之平滑度，則必須以犧牲精確度為代價，其中以 VRP 來設定 roughness penalty 函數的實證結果發現，其平均方根誤差之平均值為 0.452，相較 GCV 模型之 1.688，代表精確度上有顯著之改善，且在表 4 之檢定結果也支持此一論證。但在平滑度方面，GCV 模型較 VRP 模型產生較平滑之曲線，且在統計檢定結果上，亦驗證 GCV 模型有顯著之優越性。因此本研究在比較 GCV 模型與 VRP 模型對台灣政府公債市場進行實證研究結果，認為 GCV 模型較 VRP 模型具有較佳之平滑度配適能力；但 VRP 模型較 GCV 模型具有較佳之精確度配適能力。由於利模期限結構模型之精確度與平滑度配適能力，具有抵換關係，因此就如同 Bliss (1997) 所言⁷，「利率期限結構估計是一種藝術，配適度與模型簡約取捨，完全依手中問題而主觀決定」。

估計台灣的利率期限結構最大之困難，在於政府未定期定量發行公債，以及公債除熱門券外之流動性嚴重不足；上述原因會造成在某一特定觀察時點，樣本數不

足，因此以非線性迴歸之最小平方方法求解時，可能造成所估計出來的參數，會變得較不穩定。未來學者可針對此一流動性限制問題，提出解決方案。

註釋

1. 參見薛立言與劉亞秋（2004），p.160。
2. 「政府公債是指中央及各地方政府為因應公共事務支出，以債券型式舉借之債務」（參見吳麗敏、曾鴻展與麥煦書，2005），由於本文之研究樣本，主要有中央政府公債及台北、高雄市政府建設公債（參見附錄一），因此研究樣本均屬於政府公債之範疇。
3. 參考 Jarrow, Ruppert, and Yu（2004）。
4. Waggoner（1997）所設定之 $\lambda(t) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 100 & 1 \leq t \leq 10 \\ 100,000 & 10 \leq t \end{cases}$ ，而本文設定之 roughness penalty，係依照台灣實際債券價格不斷模擬而得之最佳結果。
5. 國內公債市場早期附條件交易占整體市場交易量極高之比重，主要的原因是政府公債籌碼不足，造成持有者惜售，因此以附條件交易取代買賣斷交易（參見薛立言與劉亞秋，2004，p.227）。但上述現象，已有改善，自 2002 年 7 月等殖成交系統上線後，買賣斷交易量已在 2003 年，首度超過附條件交易的成交金額。
6. 周建新、于鴻福與張千雲（2003）以 Nelson and Siegel（1987）及 B-spline 模型，來估計台灣公債市場利率期限結構，兩種模型的平均方根誤差分別為 1.24 與 1.79；兩種模型的平均方根誤差百分比分別為 1.1%與 1.9%。此一結果，雖然與本文實證期間不同，但與本文之結果差異不會太大。主要的原因仍在於台灣公債市場樣本數不夠齊全，及流動性不佳所導致之結果。
7. 請參見 Bliss（1997），p.27。

致謝

本研究作者感謝國科會專題研究計劃補助（NSC 94-2416-H-327-016）。

參考文獻

一、中文部分

1. 李桐豪(2001)，債券市場發展對貨幣政策之影響，中央銀行季刊，23(1)，23-45。
2. 吳秉儒(1995)，日本國債利率期間結構估計之實證研究，國立台灣科技大學企業管理研究所碩士論文。
3. 吳麗敏、曾鴻展與麥煦書(2005)，債券市場新論，台北：智勝文化。
4. 周建新、于鴻福與張千雲(2003)，利率期限結構估計模型之實證研究，管理學報，20(4)，767-796。
5. 陳美娥(2001)，台灣公債利率期限結構之配適-以契比雪夫多項式為例，國立台灣科技大學企業管理研究所碩士論文。
6. 蔣松原(2000)，建構台灣公債市場殖利率曲線，貨幣觀測與信用評等，22，99-119。
7. 謝承熹(2000)，以分段三次方指數函數配適台灣公債市場之利率期限結構：線性最適化及非線性最適化之比較，中國財務學刊，8(2)，25-47。
8. 薛立言、劉亞秋(2004)，債券市場，台北：東華書局。

二、英文部分

1. Adams, K. J., & Van Deventer, D. R. (1994). Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness. Journal of Fixed Income, 4, 52-62.
2. Bliss, R. R. (1997). Testing term structure estimation methods. Advances in Futures and Options Research, 9, 197-231.
3. Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1979). A continuous-time approach to the pricing of bonds. Journal of Banking and Finance, 3(2), 133-156.
4. Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rate. Econometrica, 53(2), 385-407.
5. Dothan, L. U. (1978). On the term structure of interest rates. Journal of Financial

Economics, 6(1), 59-69.

6. Fisher, M., Nychka, D., & Zervos, D. (1995). Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. Working Paper 95-1, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board.
7. Ho, T. S., & Lee, S. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claim. Journal of Finance, 41, 1011-1028.
8. Heath, D., Jarrow, R., & Merton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. Econometrica, 60, 77-105.
9. Jarrow, R., Ruppert, D., & Yu, Y. (2004, March). Estimating the interest rate term structure of corporate debt with a semiparametric penaliend spline model. Journal of the American Statistical Association, 57-66.
10. Jordan, J. V., & Mansi, S. A. (2003). Term structure estimation from on-the- run treasuries. Journal of Banking and Finance, 27, 1487-1509.
11. Lin, B. H. (1999). Fitting the term structure of interest rates for Taiwanese government bonds. Journal of Multinational Financial Management, 9(1), 331-352.
12. Lin, B. H. (2002). Fitting the term structure of interest rates using B-spline : the case of Taiwanese government bonds. Applied Financial Economics , 12, 55-75.
13. Mansi, S. A., & Phillips, J. H. (2001). Modeling the term structure from the on-the-run treasury yield curve. Journal of Financial Research, 24, 545-564.
14. McCulloch, J. H. (1975). The tax-adjusted yield curve. Journal of Finance, 30(3), 811-830.
15. Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. Journal of Business, 60(4), 473-489.
16. Pham, T. M. (1998). Estimation of term structure of interest rates : an international perspective. Journal of Multinational Financial Management, 8, 265-283.
17. Shea, G. S. (1985). Interest rate term structure estimation with exponential splines: a note. The Journal of Finance, 6(1), 319-325.

18. Waggoner D. F. (1997). Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices. Working Paper 97-10, Federal Reserve Bank of Atlanta.

2004 年 12 月 20 日收稿

2005 年 03 月 07 日初審

2005 年 07 月 12 日複審

2005 年 08 月 18 日接受

附錄一

台灣政府公債之樣本資料

	公債碼	發行日	年數	到期日	票面 利率	年付息 次數
00811	央債 81-1	1991/11/22	5	1996/11/22	9	2
00814	央債 81-4	1992/3/13	5	1997/3/13	8.5	2
00121	82 交建甲一	1993/6/23	4	1997/6/23	8.25	2
00821	央債 82-1	1992/7/24	5	1997/7/24	8.5	2
00822	央債 82-2	1992/8/28	5	1997/8/28	8.5	2
00825	央債 82-5	1993/3/19	5	1998/3/19	8.5	2
00851	央債 85-1	1995/10/20	3	1998/10/20	0	0
00852	央債 85-2	1995/11/24	3	1998/11/24	0	0
00812	央債 81-2	1991/12/20	7	1998/12/20	8.75	2
00823	央債 82-3	1992/11/27	7	1999/11/27	8.5	2
00824	央債 82-4	1993/2/19	7	2000/2/19	8.5	2
00826	央債 82-6	1993/4/16	7	2000/4/16	8.5	2
00832	央債 83-2	1993/12/17	7	2000/12/17	8.25	2
A83604	北二高四	1994/3/25	7	2001/3/25	8	2
A83302	83 交建甲二	1994/4/29	7	2001/4/29	7.75	2
A84102	央債 84-2	1994/12/16	7	2001/12/16	7.6	2
A84303	84 交建甲三	1995/3/17	7	2002/3/17	7.6	2
A85103	央債 85-3	1995/12/22	7	2002/12/22	7.25	1
A83101	央債 83-1	1993/9/22	10	2003/9/22	8.75	2
A83103	央債 83-3	1994/1/18	10	2004/1/18	8.25	2
A84101	央債 84-1	1994/11/18	10	2004/11/18	7.75	2
A84304	84 交建甲四	1995/6/16	15	2010/6/16	8	2
A85401	85 交建乙一	1995/7/21	15	2010/7/21	7.75	2
A85305	85 交建甲五	1995/8/25	15	2010/8/25	7.6	2
A85306	85 交建甲六	1995/9/22	15	2010/9/22	7.35	2
A85307	85 交建甲七	1996/1/19	10	2006/1/19	7.3	1
A85402	85 交建乙二	1996/3/22	15	2011/3/22	7.3	1

台灣政府公債之樣本資料(續)

公債碼	發行日	年數	到期日	票面 利率	年付息 次數
A85308 85 交建甲八	1996/4/26	10	2006/4/26	7.2	1
A85104 85 央債甲四	1996/6/18	7	2003/6/18	7	1
A86309 86 交建甲九	1996/8/23	15	2011/8/23	7.1	1
A86101 86 央債甲一	1996/9/24	10	2006/9/24	6.9	1
A86102 86 央債甲二	1996/10/22	10	2006/10/22	6.8	1
A86103 86 央債甲三	1996/11/19	7	2003/11/19	6.6	1
C86101 北建債 86	1996/12/17	10	2006/12/17	5.997	1
A86104 86 央債甲四	1996/12/20	10	2006/12/20	6.8	1
A86310 86 交建甲十	1997/1/21	15	2012/1/21	6.9	1
A86403 86 交建乙三	1997/3/11	15	2012/3/11	6.9	1
C86102 北建債 86 二	1997/5/8	10	2007/5/8	6.33	1
A87101 87 央債甲一	1997/9/23	10	2007/9/23	6.375	1
A87102 87 央債甲二	1997/11/21	5	2002/11/21	6.125	1
A87103 87 央債甲三	1997/12/19	15	2012/12/19	6.875	1
A87201 87 央債乙一	1998/2/20	15	2013/2/20	6.875	1
A87104 87 央債甲四	1998/3/17	7	2005/3/17	6.25	1
C87101 北建債 87	1998/6/25	7	2005/6/25	6.7	1
A88101 88 央債甲一	1998/9/25	10	2008/9/25	5.125	1
C88101 北建債 88	1998/11/9	7	2005/11/9	5.5	1
A88102 88 央債甲二	1998/11/24	20	2018/11/24	5.5	1
A88103 88 央債甲三	1999/1/22	20	2019/1/22	5.25	1
A88201 88 央債乙一	1999/4/23	20	2019/4/23	5.875	1
A89101 89 央債甲一	1999/7/23	5	2004/7/23	5.875	1
A89102 89 央債甲二	1999/8/20	10	2009/8/20	6.25	1
A89103 89 央債甲三	1999/9/28	15	2014/9/28	6.125	1
A89104 89 央債甲四	1999/10/15	15	2014/10/15	6.125	1
A89105 89 央債甲五	1999/11/23	10	2009/11/23	5.875	1
A89106 89 央債甲六	1999/12/17	10	2009/12/17	6	1
A89107 89 央債甲七	2000/1/18	20	2020/1/18	6.25	1

台灣政府公債之樣本資料（續）

公債碼	發行日	年數	到期日	票面 利率	年付息 次數
A89108 89 央債甲八	2000/2/15	7	2007/2/15	5.625	1
A89109 89 央債甲九	2000/3/14	15	2015/3/14	6.125	1
A89201 89 央債乙一	2000/4/21	20	2020/4/21	5.875	1
A89110 89 央債甲十	2000/6/16	10	2010/6/16	5.75	1
A89111 89 央債甲 11	2000/8/11	15	2015/8/11	5.125	1
C89101 北建債 89	2000/8/15	7	2007/8/15	5.2	1
A89112 89 央債甲 12	2000/9/13	5	2005/9/13	5.125	1
C89102 北建債 89 二	2000/9/15	7	2007/9/15	5.375	1
A89113 89 央債甲 13	2000/11/14	20	2020/11/14	5.375	1
A89114 89 央債甲 14	2000/12/15	10	2010/11/15	5.125	1
A90101 90 央債甲一	2001/1/9	10	2011/1/19	5.125	1
A90102 90 央債甲二	2001/2/13	20	2021/2/13	5	1
A90103 90 央債甲三	2001/3/6	15	2016/3/6	4.625	1
A90104 90 央債甲四	2001/5/8	20	2021/5/8	4.625	1
C90101 90 北建債一	2001/5/30	10	2011/5/30	4.619	1
A90105 90 央債甲五	2001/7/17	30	2031/7/17	3.625	1
C90102 90 北建債二	2001/7/18	10	2011/7/18	3.698	1
A90106 90 央債甲六	2001/8/7	15	2016/8/7	3.75	1
A90201 90 央債乙 01	2001/9/11	20	2021/9/11	4	1
A90107 90 央債甲七	2001/10/19	15	2016/10/19	3.5	1
A90108 90 央債甲八	2001/11/13	20	2021/11/13	3.875	1
A91101 91 央債甲一	2002/1/18	2	2004/1/18	2.25	1
A91102 91 央債甲二	2002/1/29	5	2007/1/29	3	1
A91103 91 央債甲三	2002/2/5	20	2022/2/5	4.25	1
A91104 91 央債甲四	2002/3/8	10	2012/3/8	3.625	1
A91105 91 央債甲五	2002/5/28	2	2004/5/28	2.75	1
A91106 91 央債甲六	2002/7/30	5	2007/7/30	2.625	1
A91107 91 央債甲七	2002/8/16	20	2022/8/16	3.75	1
A91108 91 央債甲八	2002/9/10	10	2012/9/10	3.25	1

台灣政府公債之樣本資料（續）

	公債碼	發行日	年數	到期日	票面 利率	年付息 次數
A91109	91 央債甲 9	2002/10/11	5	2007/10/11	2.5	1
A91110	91 央債甲 10	2002/11/19	2	2004/11/19	1.75	1
A91111	91 央債甲 11	2002/12/17	10	2012/12/17	2.5	1
A92101	92 央債甲一	2003/1/10	2	2005/1/10	1.375	1
A92102	92 央債甲二	2003/1/17	5	2008/1/17	1.625	1
A92103	92 央債甲三	2003/2/18	20	2023/2/18	2.5	1
A92104	92 央債甲四	2003/3/7	10	2013/3/7	1.875	1
A92105	92 央債甲五	2003/5/16	2	2005/5/16	1	1
A92106	92 央債甲六	2003/7/15	5	2008/7/15	1.5	1
A92107	92 央債甲七	2003/9/19	10	2013/9/19	2.75	1
A92108	92 央債甲八	2003/10/30	5	2008/10/30	2	1
A92109	92 央債甲九	2003/11/17	2	2005/11/17	1.375	1
A92110	92 央債甲十	2003/12/5	10	2013/12/5	2.875	1
A93101	93 央債甲一	2004/1/9	2	2006/1/9	1.25	1
A93102	93 央債甲二	2004/1/30	5	2009/1/30	2	1
A93103	93 央債甲三	2004/2/10	20	2024/2/10	3	1
A93104	93 央債甲四	2004/3/4	10	2014/3/4	2.375	1
C93101	93 北建債一	2004/3/16	10	2014/3/16	2.85	1
A93105	93 央債甲五	2004/4/15	2	2006/4/15	1.125	1
A93106	93 央債甲六	2004/5/27	30	2034/5/27	3.875	1
C93102	93 北建債二	2004/7/15	10	2014/7/15	3.14	1
A93107	93 央債甲七	2004/7/22	5	2009/7/22	2.125	1
D93101	93 高建債一	2004/7/23	3	2007/7/23	1.133	1
A93108	93 央債甲八	2004/9/15	10	2014/9/15	2.625	1